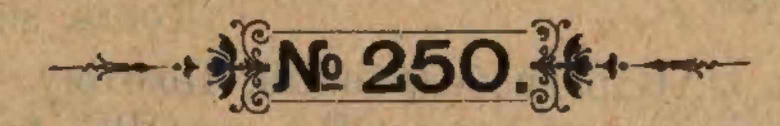
XXI Сем. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



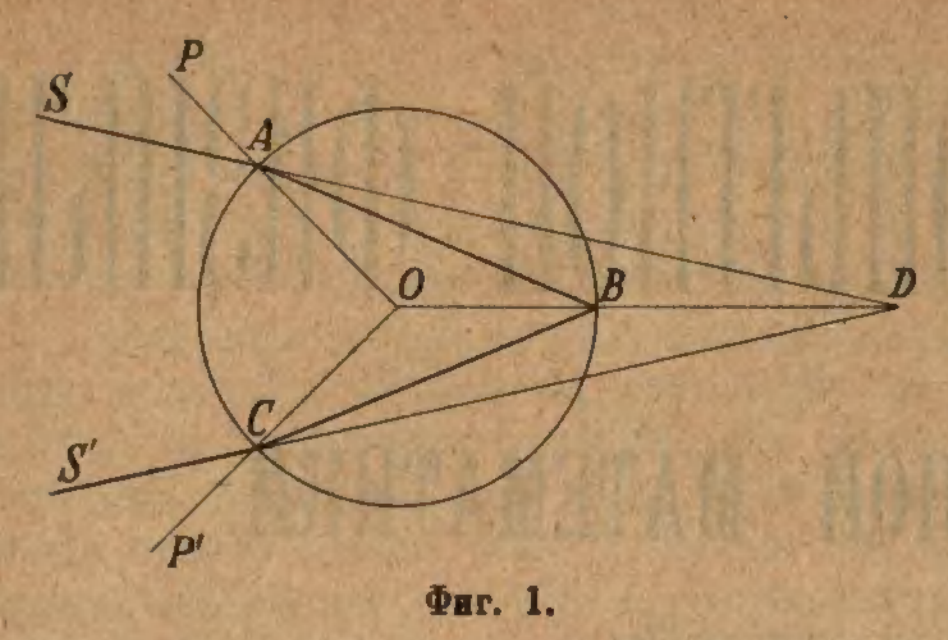
О наибольшемъ и наименьшемъ отклоненіи свѣтовыхъ лучей, проходящихъ черезъ прозрачныя тѣла.

Положимъ, что дана нѣкоторая функція отъ x. Обозначимъ ее черезъ $f(x)$. Общій способъ для нахожденія maximum или minimum $f(x)$ состоитъ въ слѣдующемъ. Даемъ независимой перемѣнной x безконечно-малое приращеніе h. Находимъ соотвѣтствующее приращеніе функціи и представляемъ его въ видѣ

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\mathrm{R},$$

гдѣ $f'(x)$ и $\frac{1}{2}f''(x)$ обозначаютъ нѣкоторыя функціи отъ x, не зависящія отъ h, а R есть многочленъ, всѣ члены котораго содержатъ h въ степени выше чѣмъ 2. Maximum или minimum $f(x)$ будутъ при такихъ значеніяхъ x, которыя удовлетворяютъ уравненію $f'(x)=0$. Обозначимъ одинъ изъ корней этого уравненія черезъ x_1. Тогда $f(x_1)$ будетъ maximum или minimum, смотря по тому, будетъ или $f''(x_1)$ менѣе или болѣе 0. Въ томъ случаѣ, когда $f''(x_1)=0$, требуются особыя вычисленія для нахожденія коэффиціентовъ при h^3 или h^4 и т. д.

Примѣнимъ этотъ способъ къ выводу условій наибольшаго отклоненія лучей шаромъ и наименьшаго отклоненія лучей призмой.



Фиг. 1.

Пусть на прозрачный шаръ съ центромъ въ точкѣ 0 падаетъ лучъ свѣта SA. (чер. 1). Путь его при одномъ внутреннемъ отраженіи будетъ ломаная SABCS′. Пусть S′C и OB пересѣкаются въ точкѣ D′, а SA и OB въ точкѣ D. Обозначимъ уголъ паденія SAP черезъ i и уголъ преломленія OAB черезъ r.

Тогда $\sin i = n \sin r$ . . . . . (1)

Треугольникъ OAB равнобедренный. Поэтому углы OAB и OBA равны. По закону отраженія углы OBA и OBC равны. Треугольникъ OBC равнобедренный. Углы OBC и OCB равны. Слѣдовательно, $\angle OCB = r$ и $\angle P'CS' = i$. Каждый изъ угловъ ABD и CBD′ равенъ $2r$, каждый изъ угловъ BAD и BCD′ равенъ $i - r$. Прямыя AB и BC равны какъ хорды, соотвѣтствующія равнымъ центральнымъ угламъ. Поэтому треугольники ABD и CBD′ равны. Изъ равенства ихъ слѣдуетъ, что BD = BD′, т. е. точки D и D′ совпадаютъ. Уголъ OBA будетъ внѣшнимъ для треугольника ABD. Поэтому $r = i - r + \angle ADB$, откуда $\angle ADB = 2r - i$ и $\angle ADC = 4r - 2i$. Полагаемъ $f(i) = 4r - 2i$. Даемъ перемѣнной i безконечно-малое приращеніе α; тогда r получитъ соотвѣтствующее приращеніе β. Приращеніе $f(i)$ будетъ

$f(i+\alpha) - f(i) = 2(2\beta - \alpha)$. Кромѣ того $\sin(i+\alpha) = n\sin(r+\beta)$. . . . . (1 bis)

Вычитая изъ этого уравненія уравненіе (1) и примѣняя формулу для разности синусовъ, получимъ послѣ сокращенія на 2:

$$\cos\left(i + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = n\cos\left(r + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}.$$

Извѣстно, что $\sin\varepsilon = \varepsilon - \vartheta\varepsilon^3$, гдѣ ϑ есть правильная дробь. Если ε есть безконечно-малая величина, то

$$\cos(i+\varepsilon)\sin\varepsilon = \left(\cos i - 2\sin\left(i + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\varepsilon =$$

$$= \left(\cos i - 2\sin i \sin\frac{\varepsilon}{2} - 4\cos\left(i + \frac{\varepsilon}{4}\right)\sin\frac{\varepsilon}{4}\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\varepsilon =$$

$$= \cos i(\varepsilon - \vartheta\varepsilon^3) - 2\sin i\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\vartheta'\varepsilon^3}{8}\right)(\varepsilon - \vartheta\varepsilon^3) + K,$$

или

$$\cos(i+\varepsilon)\sin\varepsilon = \varepsilon\cos i - \varepsilon^2\sin i + R,$$

гдѣ R есть многочленъ, члены котораго содержатъ ε въ степени выше, чѣмъ 2. Другими словами R есть величина безконечно-малая 3-яго порядка относительно ε.

Примѣняя эту формулу, получимъ

$$\frac{\alpha}{2}\cos i - \frac{\alpha^2}{4}\sin i = \frac{n}{2}\beta\cos r - \frac{n}{4}\beta^2\sin r + R_1.$$

Возводя обѣ части этого равенства въ квадратъ, находимъ

$$\frac{\alpha^2}{4}\cos^2 i = \frac{n^2}{4}\beta^2\cos^2 r + R_2,$$

гдѣ R_2 есть безконечно-малая 3-ьяго порядка.

Послѣ этого находимъ

$$f(i+\alpha) - f(i) = 2\alpha\left(\frac{2\cos i}{n\cos r} - 1\right) - \frac{2\alpha^2}{n^2\cos^3 r}(n\sin i\cos^2 r - \sin r\cos^2 i) + R_3.$$

Maximum $f(i)$ будетъ при значенiи i, удовлетворяющемъ уравненiю

$$2\cos i = n\cos r \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (2)$$

Изъ уравненiй (1) и (2) находимъ:

$$\sin^2 r = \frac{\sin^2 i}{n^2}, \cos^2 r = \frac{4\cos^2 i}{n^2}.$$

Отсюда

$$\sin^2 i + 4\cos^2 i = n^2 \text{ и } \sin i = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3)$$

При этомъ значенiи i приращенiе функцiи приметъ видъ

$$f(i+\alpha) - f(i) = -\frac{3}{4}\alpha^2 \operatorname{tg} i + R_4.$$

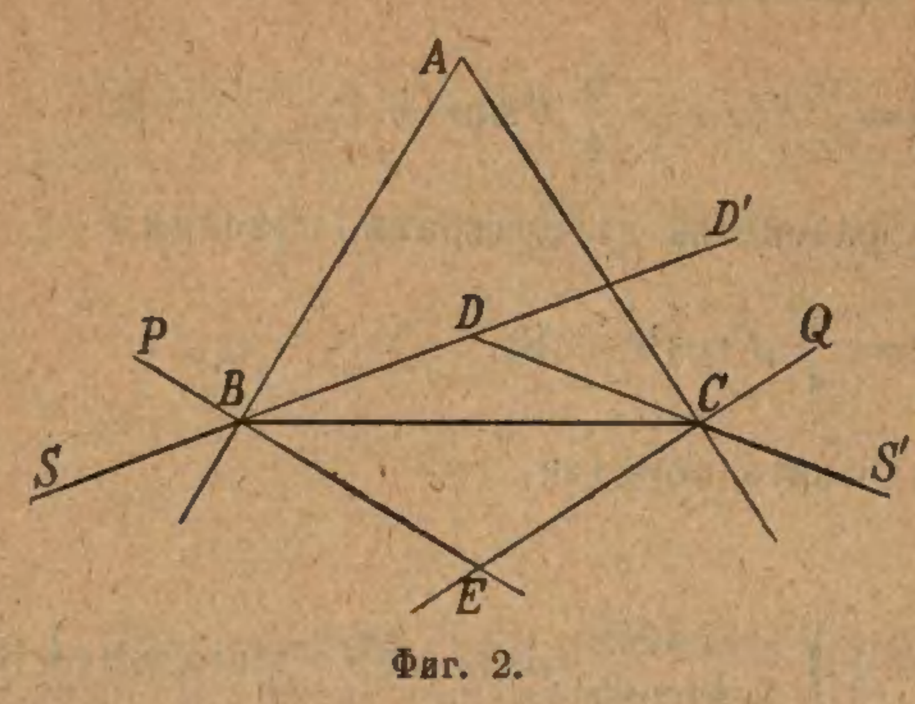
Это показываетъ, что $f(i)$ имѣетъ значенiе maximum, когда i удовлетворяетъ уравненiю (3). Возьмемъ безконечно-тонкiй цилиндрическiй пучекъ лучей, въ которомъ центральный лучъ испытываетъ наибольшее отклоненiе. Всѣ лучи этого пучка по выходѣ изъ шара можно считать параллельными. Въ самомъ дѣлѣ, отклоненiя для всѣхъ лучей этого пучка будутъ одинаковы, такъ какъ для него $f(i+\alpha) = f(i)$, если пренебрегать величинами, содержащими α въ степени выше первой.

Такимъ образомъ пучекъ лучей, выходящихъ изъ шара съ наибольшимъ отклоненiемъ, будетъ дѣйствующимъ на глазъ, находящiйся далеко отъ шара на пути этихъ лучей.

Подобнымъ же образомъ можно вывести, что отклоненiе луча, проходящаго черезъ шаръ послѣ k внутреннихъ отраженiй, будетъ наибольшимъ при такомъ углѣ паденiя i, синусъ котораго равенъ

$$\sqrt{\frac{(k+1)^2 - n^2}{k^2 + 2k}}.$$

На этомъ основано объясненiе явленiя радуги.



Фиг. 2.

Положимъ, что лучи свѣта падаютъ на прозрачную призму съ преломляющимъ угломъ A. (чер. 2). Путь какого нибудь луча будетъ ломаная SBCS'. Обозначимъ углы SBP, CBE, BCE, S'CQ соотвѣтственно черезъ i, r, r_1, i_1. Тогда получимъ

$$\sin i = n \sin r \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

$$r + r_1 = A \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Придаемъ перемѣнной i_1 безконечно малое приращеніе α_1. Тогда другія перемѣнныя i, r и r_1 получатъ соотвѣтствующія приращенія α, β, β_1. Можно написать

$$\sin(i+\alpha) = n\sin(r+\beta) \ldots . . \text{ (1 bis)}, \quad r+\beta+r_1+\beta_1 = A \ldots . . \text{ (4 bis)},$$

$$\sin(i_1+\alpha_1) = n\sin(r_1+\beta_1) \ldots . . \qquad \text{(5 bis)}.$$

Уголъ $D'DS' = f(i_1) = i + i_1 - A$. Поэтому $f(i_1+\alpha_1) - f(i) = \alpha + \alpha_1$.

Вычитая уравненія (1 bis), (4 bis) и (5 bis) соотвѣтственно изъ уравненій (1), (4) и (5), находимъ

$$\cos\left(i+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = n\cos\left(r+\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}, \; \beta+\beta_1 = 0,$$

$$\cos\left(i_1+\frac{\alpha_1}{2}\right)\sin\frac{\alpha_1}{2} = n\cos\left(r_1+\frac{\beta_1}{2}\right)\sin\frac{\beta_1}{2}.$$

Примѣняя указанную выше формулу, получимъ:

$$\frac{\alpha}{2}\cos i - \frac{\alpha^2}{4}\sin i = \frac{n}{2}\beta\cos r - \frac{n}{4}\beta^2\sin r + R$$

$$\frac{\alpha_1}{2}\cos i_1 - \frac{\alpha_1{}^2}{4}\sin i_1 = \frac{n}{2}\beta_1\cos r_1 - \frac{n}{4}\beta_1{}^2\sin r_1 + R_1.$$

Кромѣ того второе изъ этихъ уравненій даетъ намъ

$$\alpha_1{}^2\cos^2 i_1 = n^2\beta_1{}^2\cos^2 r_1 + R_2.$$

На основаніи этого представляемъ его въ видѣ

$$\frac{\alpha_1}{2}\cos i_1 - \frac{\alpha_1{}^2}{4}\sin i_1 = \frac{n}{2}\beta_1\cos r_1 - \frac{n\sin r_1}{4}\cdot\frac{\alpha_1{}^2\cos^2 i_1}{n^2\cos r_1} + R_3.$$

Такъ какъ $\beta = -\beta_1$, то

$$\frac{\alpha}{2}\cos i - \frac{\alpha^2}{4}\sin i = -\frac{n\cos r}{2}\left(\frac{\alpha_1\cos i_1}{n\cos r_1} - \frac{\alpha_1{}^2\sin i_1}{2n\cos r_1} + \frac{\alpha_1{}^2\sin r_1\cos^2 i_1}{2n^2\cos^3 r_1}\right) -$$

$$-\frac{n\sin r}{4}\cdot\frac{\alpha_1{}^2\cos^2 i_1}{n^2\cos^2 r_1} + R_4.$$

Отсюда находимъ

$$\alpha^2\cos^2 i = \frac{\alpha_1{}^2\cos^2 r\cos^2 i_1}{\cos^2 r_1} + R_5.$$

Такимъ образомъ

$$\alpha - \frac{\alpha_1{}^2\sin i\cos^2 r\cos^2 i_1}{2\cos^2 r_1\cos^3 i} = -\frac{\alpha_1\cos r\cos i_1}{\cos r_1\cos i} + \frac{\alpha_1{}^2\cos r\sin i_1}{2\cos r_1\cos i} -$$

$$-\frac{\alpha_1{}^2\cos r\sin r_1\cos^2 i_1}{2n\cos^3 r_1\cos i} - \frac{\alpha_1{}^2\sin r\cos^2 i_1}{2n\cos^2 r_1\cos i} + R_6.$$

Послѣ этого

$$f(i_1+\alpha_1) - f(i_1) = \alpha_1\left(1 - \frac{\cos r\cos i_1}{\cos r_1\cos i}\right) + R_7 +$$

$$+\alpha_1{}^2\left(\frac{\sin i\cos^2 r\cos^2 i_1}{2\cos^2 r_1\cos^3 i} + \frac{\cos r\sin i_1}{2\cos r_1\cos i} - \frac{\cos r\sin r_1\cos^2 i_1}{2n\cos^3 r_1\cos i} - \frac{\sin r\cos^2 i_1}{2n\cos^2 r_1\cos i}\right).$$

Разсматриваемая $f(i_1)$ имѣетъ значенiе maximum или minimum при значенiи i_1, удовлетворяющемъ уравненiю

$$\cos r\cos i_1 = \cos r_1\cos i.$$

Рѣшаемъ это уравненiе:

$$\cos^2 r\cos^2 i_1 = \cos^2 r_1\cos^2 i,\ (1-\sin^2 r)(1-n^2\sin^2 r_1) = (1-\sin^2 r_1)(1-n^2\sin^2 r).$$

Сдѣлавъ умноженiе и отнявъ равные члены отъ обѣихъ частей уравненiя, получимъ

$$-\sin^2 r - n^2\sin^2 r_1 = -\sin^2 r_1 - n^2\sin^2 r,\ (n^2-1)\sin^2 r = (n^2-1)\sin^2 r_1.$$

Отсюда

$$r = r_1 = \frac{A}{2},\ i = i_1,\ \sin i = n\sin\frac{A}{2}.$$

При этомъ значенiи i_1 имѣемъ

$$f(i_1+\alpha) - f(i_1) = \alpha_1{}^2\left(\operatorname{tg} i - \frac{\sin r\cos i}{n\cos^2 r}\right) + R_8 =$$

$$= \alpha_1{}^2\left(\frac{n}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{A}{2}}} - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{A}{2}}}{n\cos^2\frac{A}{2}}\right)\sin\frac{A}{2} + R_8.$$

Такъ какъ $n^2\cos^2\frac{A}{2} > 1 - n^2\sin^2\frac{A}{2}$ при $n > 1$ и $n^2\cos^2\frac{A}{2} < 1 - n^2\sin^2\frac{A}{2}$ при $n < 1$, то коэффиціентъ при $\alpha_1{}^2$ будетъ положителенъ въ первомъ случаѣ и отрицателенъ во второмъ. Такимъ образомъ при $n > 1$ отклоненіе лучей призмой будетъ наименьшимъ при углѣ перваго преломленія равномъ половинѣ преломляющаго угла призмы.

Если $n < 1$, то при томъ-же условіи отклоненіе лучей призмой будетъ наибольшимъ.

Возьмемъ безконечно-тонкій пучекъ лучей, выходящихъ изъ какой-нибудь точки, или сходящихся въ точкѣ паденія. Пусть центральный лучъ этого пучка падаетъ подъ угломъ, соотвѣтствующимъ наименьшему отклоненію. Тогда выходящій изъ призмы пучекъ лучей можно считать параллельнымъ, такъ какъ приращеніе угла отклоненія равно 0, если пренебрегать величинами безконечно-малыми 2-го порядка.

Положимъ, что на призму падаютъ параллельные лучи въ плоскости, перпендикулярной къ преломляющему ребру. Пусть призма вращается около оси, параллельной преломляющему ребру.

Разберемъ, какіе изъ выходящихъ лучей произведутъ наибольшее впечатлѣніе на глазъ?

При вращеніи призмы уголъ паденія измѣняется и вмѣстѣ съ тѣмъ измѣняется уголъ отклоненія лучей. Но при наименьшемъ отклоненіи лучей уголъ отклоненія не мѣняется въ теченіе нѣкотораго безконечно-малаго промежутка времени, пока уголъ преломленія измѣняется отъ $\frac{A}{2} - \beta$ до $\frac{A}{2} + \beta$. Этотъ пучекъ произведетъ на глазъ наибольшее впечатлѣніе и будетъ дѣйствующимъ.

На этомъ основано объясненіе явленія круговъ около солнца и луны.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

Объ обращеніи простыхъ дробей въ десятичныя.

Теорема. *Въ безконечномъ ряду чиселъ 1, 11, 111,...... всегда можно найти число, дѣлящееся безъ остатка на всякое данное число, не кратное 2 и 5. При чемъ число цифръ этого числа не будетъ больше дѣлителя.*

Доказательство. Числа, не кратныя 2 и 5, могутъ имѣть своими послѣдними цифрами 1, 3, 7 и 9. Возьмемъ какое угодно цѣлое число D, большее единицы и не кратное 2 и 5, и будемъ на него дѣлить безконечное число 111111..... Условимся, при всякомъ D, считать 1-ую цифру число 111...., единицу, за 1-е дѣлимое. Тогда 1-й остатокъ всегда будетъ равенъ 1. Всѣ послѣдующія дѣлимыя также будутъ имѣть своею послѣднею цифрою 1, такъ какъ каждое изъ нихъ равно соотвѣтствующему остатку, умноженному на 10 и сложенному съ 1. Общій видъ такихъ дѣлимыхъ будетъ $10d+1$, гдѣ d означаетъ остатокъ, отъ котораго образовались дѣлимое $10d+1$.

Такъ какъ число различныхъ остатковъ ограничено (оно, считая и остатокъ 0, не будетъ больше дѣлителя), то непремѣнно будетъ повторяться хотя одинъ изъ остатковъ.

Пусть одинъ изъ такихъ повторяющихся остатковъ будетъ c. Тогда дѣлимое, давшее этотъ остатокъ, можетъ быть выражено черезъ $10b + 1$, гдѣ b есть остатокъ, предшествовавшій остатку c.

Докажемъ, что остатокъ c можетъ получаться только отъ дѣлимаго $10b + 1$, а не другихъ.

Дѣйствительно остатокъ c при дѣленіи на D не можетъ, очевидно, получиться отъ дѣленія другихъ чиселъ, кромѣ слѣдующихъ:

$$10b + 1,\ 10b + 1 + 1.D,\ 10b + 1 + 2D,\ 10b + 1 + 3D,$$

$$\ldots\ldots\ 10b + 1 + 9.D,\ 10b + 1 - 1D$$

$$10b + 1 - 2D, \ldots\ 10b + 1 - 9D.$$

Но такъ какъ ни одно изъ произведеній числа D (послѣднею цифрою котораго можетъ быть лишь одна изъ цифръ 1, 3, 7.... 9) на число 1, 2, 3,..... 9, не будетъ оканчиваться 0, то ни одно изъ вышеозначенныхъ чиселъ, кромѣ $10b + 1$, не будетъ оканчиваться единицею. Отсюда заключаемъ, что остатокъ c будетъ получаться лишь отъ дѣленія числа $10b + 1$; но дѣлимое $10b + 1$ можетъ получиться только послѣ полученія остатка b; слѣдовательно, пока вновь не получится остатокъ b, остатокъ c не сможетъ повторяться.

Такимъ образомъ, ни одинъ изъ остатковъ не можетъ повториться раньше предшествующаго ему остатка, а потому необходимо долженъ повториться 1-й остатокъ, который, какъ мы видѣли, равенъ 1. Этотъ остатокъ можетъ получиться только отъ дѣленія единицы.

Слѣдовательно, должно получиться вторично дѣлимое, равное 1; а это можетъ быть только тогда, когда остатокъ, полученный отъ предшествующаго дѣленія равенъ 0, откуда вытекаетъ, что нѣкоторое число изъ ряда чиселъ 1, 11, 1111... должно дѣлиться безъ остатка на D.

Слѣдствіе. *Каково бы ни было число* D, *не дѣлящееся на 2 и 5, въ каждомъ изъ рядовъ чиселъ*

2, 22, 222,...... 3, 33, 333......... 9, 99, 999.....

можно найти число, дѣлящееся безъ остатка на D.

Если возьмемъ число $B = 111\ldots1$, содержащее $D + 1$ цифръ, то при дѣленіи его на D долженъ повториться хотя одинъ изъ остатковъ (такъ какъ различныхъ остатковъ, считая и 0, не можетъ быть больше D). Но 1-мъ повторяющимся остаткомъ, какъ доказано, долженъ быть остатокъ 1, который можетъ получиться только отъ дѣленія 1-цы, а этому дѣлимому предшествуетъ остатокъ 0.

Отсюда слѣдуетъ, что наименьшее изъ чиселъ вида 111..., дѣлящихся на D, не будетъ имѣть болѣе D цифръ.

Тоже можно сказать и о всѣхъ числахъ вида 222..., 333,....

Не трудно затѣмъ доказать, что наименьшее изъ чиселъ вида 9999999...., дѣлящихся на D, содержитъ не болѣе $D - 1$ цифръ.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, число $B = 999\ldots9$ изображается $D-1$ цифрою. Докажемъ, что при дѣленіи его на D долженъ непремѣнно встрѣтиться остатокъ 0. Предположимъ противное. Такое предположеніе приведетъ къ заключенію, что всѣ остатки, получаемые при дѣленіи B на D, будучи отличны отъ 0, различны между собою, такъ какъ ни одинъ изъ остатковъ не можетъ повториться прежде, чѣмъ получится въ остаткѣ 0 (ибо, въ противномъ случаѣ, въ остаткѣ никогда не получился бы нуль, сколько бы разъ мы не прилагали цифру 9 ко взятому числу, — а это противорѣчитъ доказанному выше).

Слѣдовательно, такъ какъ всѣхъ остатковъ получится $D-1$ (ибо число B содержитъ $D-1$ цифръ) и всѣ они притомъ различны и не превосходятъ $D-1$, то одинъ изъ остатковъ долженъ быть $= D-1$.

Но если бы встрѣтился этотъ остатокъ, то слѣдующее за нимъ дѣлимое должно было бы быть равнымъ

$$(D-1)\,10+9 = 10\,D-10+9 = 9\,D+D-1,$$

но такое дѣлимое дало бы вновь остатокъ $D-1$.

Слѣдовательно, въ остаткѣ не получился бы никогда 0, сколько бы ни продолжали дѣленіе (приписывая ко взятому числу девятки), а это противно доказанной выше теоремѣ.

Поэтому предположеніе, что при дѣленіи на D числа $B = 99\ldots9$, изображеннаго $D-1$ цифрой, не встрѣтится остатка, равнаго 0, приводитъ къ противорѣчію, а слѣдовательно оно не можетъ быть допущено.

Теорема.—*Всякая несократимая правильная дробь, въ знаменатель которой не входятъ множителями 2 и 5, обращается въ чистую періодическую дробь.*

Пусть дана дробь $\frac{N}{D}$, гдѣ $N < D$ и D не содержитъ множителей 2 и 5.

Чтобы доказать, что эта дробь обратится въ чистую періодическую, достаточно доказать, что при дѣленіи числителя N на знаменателя D встрѣтится остатокъ, равный числителю N; другими словами, — что можно къ числителю N данной дроби приписать такое число нулей, чтобы, дѣля полученное такимъ образомъ число на D, получить въ остаткѣ N.

Найдемъ въ ряду чиселъ 9, 99, 999... наименьшее число, дѣлящееся безъ остатка на D. Пусть число это имѣетъ k цифръ. Докажемъ, что если числителя N дроби $\frac{N}{D}$ умножимъ на число, изображенное 1-ею и k нулями, и прозведеніе это раздѣлимъ на D, то полученный остатокъ будетъ равенъ числителю N.

Произведеніе N на число, изображенное единицею и k нулями, можно представить въ видѣ $N.10^k$. Назовемъ частное отъ дѣленія этого числа на N черезъ A и остатокъ черезъ x; тогда получимъ равенство:

$$N.10^k = AD + x.$$

Но при всякомъ k (цѣломъ и положительномъ) 10^k можетъ быть представлено въ видѣ суммы 2-хъ чиселъ, и изъ которыхъ одно изображается цифрою 9, повторенной k разъ, а другое равно 1, такъ что

$$N . 10^k = 999 \ldots 9 N + N.$$

Подставляя въ это уравненіе вмѣсто $N . 10^k$ его величину $AD + x$, получимъ:

$$AD + x = 999 \ldots 9 \; N + N$$

или

$$A.D - 999 \ldots 9. \; N = N - x.$$

Но $A . D$ — кратное D; $999 \ldots 9$, въ которомъ k цифръ, есть наименьшее изъ чиселъ вида 9, 99, 999..., дѣлящихся на D безъ остатка. поэтому $999 \ldots 9 \; N$ будетъ также кратное D.

Но разность между 2-мя кратными какого нибудь числа D можетъ быть или нулемъ, или числомъ, кратнымъ D. Слѣдовательно и разность $N—x$ либо равна нулю, либо представляетъ число, кратное D. А такъ какъ каждое изъ чиселъ N и x меньше D, то разность $N—x$ должна равняться 0, откуда $x = N$.

Если при обращеніи дроби $\frac{N}{D}$ въ періодическую числителя $N < D$ считатъ за 1-ый остатокъ, то остатокъ X, равный N, будетъ $(k + 1)$-ымъ остаткомъ: безконечная дробь, получаемая при обращеніи дроби $\frac{N}{D}$ въ десятичную, будетъ имѣть періодъ содержащій k цифръ, и такъ какъ $k \leq D - 1$, то число цифръ этого періода будетъ меньше знаменателя D.

П. Коростовцевъ.

Опыты съ катушкой Румкорфа.

Индуктивная спираль всегда представляла собой приборъ, очень цѣнный для лабораторіи; послѣ же многихъ блестящихъ работъ по физикѣ, произведеныхъ въ послѣдніе двадцать лѣтъ, значеніе ее возросло до такой степени, что физику почти невозможно обойтись безъ нея. Между тѣмъ, не смотря на то совершенство, до котораго доведенъ этотъ аппаратъ, еще не существуетъ полной теоріи его*), т. е. полнаго знакомства съ нимъ. Нѣтъ ничего проще тѣхъ объясненій, которыми сопровождаются описанія его въ сравнительно еще нестарыхъ курсахъ физики, и если нѣкоторыя изъ этихъ объясненій далеко не полны, то другія далеко не удовлетворительны. Истинная роль конденсатора въ

*) *Р. Колли* Къ теоріи снаряда Румкорфа. Ж. Р. Ф. Х. О., т. XXIII., вып. I. *П. Боргманъ.* Основанія ученія объ электрическихъ и магнитныхъ явленіяхъ. II, 451. СПБ. 1895.

первичной цѣпи прибора только въ послѣднее время начинаетъ выясняться—благодаря изученію колебательнаго разряда—и во всякомъ случаѣ еще недавно вызывала разногласіе между лучшими знатоками дѣла*). Значеніе желѣзнаго сердечника, столь понятное, повидимому, еще не выяснено вполнѣ**). Значеніе раздѣленія вторичной спирали на секціи не такъ просто, какъ это кажется съ перваго взгляда***) и поэтому часто объясняется очень не полно. Наконецъ одно изъ самыхъ интересныхъ явленій—электрическія колебанія въ индуктивной спирали—очень часто совершенно обходятся молчаніемъ. Поэтому, все, что хоть въ слабой степени можетъ пополнить наше знаніе этого прибора, не рискуетъ оказаться вполнѣ излишнимъ, тѣмъ болѣе, если могутъ быть указаны такія условія опытовъ, которыя по своей простотѣ доступны рѣшительно всякому.

Обстановка опытовъ, изложенію которыхъ посвящено дальнѣйшее содержаніе, очень проста: она требуетъ спирали самыхъ незначительныхъ размѣровъ, 1 или 2 элементовъ Грене и трубки Гейслера. Извѣстно, что въ разомкнутой вторичной цѣпи катушки получаются изохронныя электрическія колебанія, съ періодомъ до 0,0001 секунды. Но такъ какъ они въ значительной степени обусловлены колебательнымъ разрядомъ конденсатора, то несомнѣнно, что при незначительныхъ размѣрахъ аппарата, т. е. при сравнительно незначительной длинѣ первичной и вторичной цѣпи, этотъ періодъ можетъ быть значительно меньше. Для полученія необходимаго для опытовъ періода нужно подобрать для первичной цѣпи конденсаторъ соотвѣтственной емкости. Онъ подобранъ хорошо, если трубка Гейслера, соединенная однимъ электродомъ съ внѣшнимъ концомъ вторичной цѣпи, начинаетъ свѣтиться. Для опытовъ достаточно спирали, дающей искру въ 4—5 мм.

Во время дѣйствія прибора его вторичная обмотка остается разомкнутой. Трубка, поднесенная къ катушкѣ, начинаетъ свѣтиться въ рукахъ. Можно устранить руку, не уничтожая этимъ свѣченія, но оно нѣсколько ослабѣваетъ. Рука можетъ быть замѣнена конденсаторомъ или металлическимъ тѣломъ. Это явленіе вообще не ново, но обыкновенно предполагается, что оно имѣетъ мѣсто только при очень сильныхъ спираляхъ****) Небольшой станіолевый листъ соединяется проволокою со внѣшнимъ концомъ вторичной обмотки, на извѣстномъ разстояніи отъ него трубка начинаетъ свѣтиться. Этотъ опытъ можно видоизмѣнить слѣдующимъ образомъ. Картонная трубка небольшого діаметра обвивается неизолированной проволокой, которая соединяется уже указаннымъ образомъ съ спиралью: Гейслерова трубка, введенная въ картонную, начинаетъ свѣтиться.

---

*) *Р. Колли.* l. c. О колебательномъ разрядѣ конденсатора въ спирали Румкорфа; см. *Р. Колли, Ж. Жуберъ.* Основанія ученія объ электричествѣ, § 399, 2 изд. М. 1892, *Л. Грецъ.* Электричество его примѣненія СПБ. 1897.

**) *Р. Колли.* l. c.

***) *Р. Колли.* l. c.

****) *Э. Томсонъ.* Индукція отъ разрядовъ высокаго потенціала. Электричество. 1892. №№ 11—12.

Эти или подобныя имъ явленія послѣ опытовъ Тесла вообще не новы, но въ нихъ они достигаются съ помощью очень сложныхъ и довольно дорогихъ приспособленій, такъ что опыты этого рода доступны немногимъ. Здѣсь указывается средство воспроизвести ихъ, конечно, съ значительною разницею въ масштабахъ, при самой незатѣйливой обстановкѣ. Электростатическое происхожденіе (а не электродинамическое, какъ можетъ показаться съ перваго взгляда) этихъ явленій обстоятельно доказано Н. Тесла*)

Если картонную трубку послѣдняго опыта снова замѣнить кускомъ станіоля, то число явленій этого рода можетъ быть увеличено [redacted] они принимаютъ оригинальную форму. При такомъ приспособленіи трубка начинаетъ свѣтиться, если прикоснуться однимъ изъ ея электродовъ къ любому изъ полюсовъ элемента или вообще къ металлическимъ частямъ его. Но она свѣтится и при прикосновеніи къ стеклу элемента и даже безъ всякаго прикосновенія; въ послѣднихъ двухъ случаяхъ свѣченіе наблюдается только возлѣ той части элемента, которая заполнена жидкостью. Иногда свѣченіе наблюдается и вблизи проводниковъ. Трубку нужно держать въ рукѣ или за стекло или за проволоку, соединенную съ однимъ изъ ея электродовъ. Это явленіе заслуживаетъ вниманія, между прочимъ, по слѣдующимъ причинамъ.

Если прикоснуться трубкой къ одному изъ полюсовъ элемента и въ то [redacted] время постепенно уменьшать станіолевую поверхность, отрѣзывая отъ нея куски, то свѣченіе трубки начинаетъ ослабѣвать. Если сразу удалить станіоль—трубка тотчасъ угасаетъ.

Если установить трубку вертикально вблизи элемента и одну руку поднести къ ея верхнему электроду, а другую къ станіолевому листу (не дотрагиваясь [redacted] до того ни до другого) то трубка начинаетъ вспыхивать. Для этого опыта удобнѣе брать аккумуляторъ.

Если установить трубку вертикально на эбонитовой крышкѣ элемента (Грене) вблизи одного изъ полюсовъ и не дотрагиваться до трубки, то, говоря вообще, трубка не свѣтится (Иногда замѣчается слабое вспыхиваніе, но мы сейчасъ увидимъ причину его). Если послѣ этого, находясь почти на аршинъ отъ элемента, прикоснуться рукой къ станіолю, то трубка сразу вспыхиваетъ; свѣченіе продолжается все время, пока рука прикасается къ металлической поверхности и прекращается съ отнятіемъ руки.

Такимъ образомъ, тѣло наблюдателя является звѣномъ цѣпи, образованной электрическими излученіями, цѣпи, замыкающейся черезъ воздухъ. Такую цѣпь можно назвать лучистою цѣпью.

Но такая цѣпь можетъ быть замкнута не только черезъ воздухъ. Если прикоснуться одной рукой къ станіолевой поверхности, попрежнему соединенной съ спиралью, а другую поднести къ одному изъ полюсовъ элемента, то мы получимъ хорошо извѣстное сотрясеніе отъ индуктивнаго тока. Здѣсь цѣпь замыкается элементомъ, замѣняющимъ

---

*) *Н. Тесла.* Опыты надъ перемѣнными токами весьма высокой перемежаемости. Электричество, 1892, №№ 15—16.

по своему потенціалу внутренній конецъ вторичной обмотки катушки. Если же прикоснуться къ стеклу элемента въ той части его, которая заполнена жидкостью, то между рукой и стекломъ элемента, безъ всякаго болѣзненнаго ощущенія, начинаетъ сыпаться съ сухимъ трескомъ дождь мелкихъ искръ, образующихъ въ темнотѣ голубое сіяніе. Искры сопровождаются образованіемъ озона. Если вмѣсто руки поднести къ элементу тотъ станіоль, къ которому мы прикасались другой рукой, не нарушая его соединенія съ спиралью, то потокъ искръ дѣлается болѣе энергическимъ и болѣе шумнымъ. Здѣсь цѣпь замыкается уже черезъ стекло элемента.

Въ образованіи замкнутой цѣпи можно убѣдиться и ощущеніемъ. Станіолевый листъ соединенъ попрежнему съ катушкой; если одной рукой взять трубку за стекло и однимъ электродомъ ея прикоснуться къ станіолю, а другую руку приблизить къ одному изъ полюсовъ элемента, то между рукой и полюсомъ получаются искры и рука чувствуетъ слабыя подергиванія, сопровождающія прохожденіе слабаго индуктивнаго тока черезъ тѣло.

На этихъ фактахъ основывается красивое явленіе свѣченія трубки между наблюдателями. Одинъ изъ экспериментаторовъ прикасается металлическимъ стержнемъ къ борну катушки, соединенному съ внѣшнимъ концомъ вторичной обмотки, и въ другую руку беретъ неизолированную проволоку, соединенную съ однимъ изъ электродовъ трубки. Другой электродъ берется такимъ-же образомъ другимъ лицомъ, которое прикасается свободной рукой къ стеклу элемента, доставляющаго наводящій токъ. Трубка начинаетъ ярко свѣтиться. При маленькой спирали и одномъ аккумуляторѣ свѣченіе трубки могло быть произведено въ цѣпи изъ пяти человѣкъ.

Принимающіе участіе въ этомъ опытѣ не чувствуютъ во время его никакихъ болѣзненныхъ ощущеній; но если онъ повторялся нѣсколько разъ подрядъ, то они жалуются на сильную усталость, сопровождающуюся у нѣкоторыхъ слабостью въ ногахъ или болью сердца.

Такъ какъ въ этомъ опытѣ элементъ по своему потенціалу играетъ роль внутренняго конца вторичной обмотки, то очевидно, что его можно замѣнить послѣднимъ, снабдивъ зажимъ, съ которымъ онъ соединенъ, изолированнымъ реофоромъ. Въ этомъ случаѣ свѣченіе трубки нѣсколько слабѣе. Наконецъ мнѣ удавалось нѣсколько разъ—при условіяхъ, которыя я еще не уловилъ вполнѣ,—получать безъ болѣзненныхъ ощущеній свѣченіе трубки между двумя наблюдателями, вводя ихъ прямо во вторичную цѣпь (т. е. безъ изолированнаго реофора). Быть можетъ, въ этомъ фактѣ можно видѣть подтвержденіе мнѣнія Э. Жерара о колебательномъ характерѣ разряда въ разрѣженныхъ газахъ*); условія же опыта, кажется, заключаются въ удачномъ согласованіи тока со степенью разрѣженности газа въ трубкѣ.

Н. Боровко (СПБ.).

---

*) *Э. Жераръ.* Курсъ электричества, II, § 694. СПБ. 1896, 2-е изд.

Первый памятникъ русскому ученому.

Наши читатели знаютъ уже, что 1 сентября 1896 года въ Казани торжественно открытъ памятникъ Николаю Ивановичу Лобачевскому, великому русскому геометру. Благодаря любезности проф. А. В. Васильева, предоставившаго въ наше распоряженіе фотографическіе снимки памятника, мы имѣемъ возможность дать нашимъ читателямъ изображеніе этого перваго въ Россіи памятника человѣку, прославившаго себя работами въ той области, которая наименѣе пользуется извѣстностью среди публики.



Памятникъ Н. И. Лобачевскому въ Казани.

Первая мысль объ устройствѣ памятника Н. И. Лобачевскому возникла въ засѣданіи Казанской Городской Думы 25 мая 1893 года. Въ

день празднованія столѣтія со дня рожденія Н. И. Лобачевскаго, 22-го октября 1893 года, казанскій городской голова С. В. Дьяченко краснорѣчиво выразилъ эту мысль. Мысль встрѣтила сочувствіе, подписка дала средства и въ концѣ 1893 г. Дума рѣшила возбудить ходатайство о Высочайшемъ разрѣшеніи на постановку памятника Лобачевскаго въ Казани, въ скверѣ его имени, а также составила особую коммиссію по сооруженію памятника изъ трехъ гласныхъ думы и трехъ представителей физико-математическаго общества при Казанскомъ Университетѣ. 23 мая 1895 года коммиссія, предсѣдателемъ которой былъ избранъ С. В. Дьяченко, заключила договоръ съ классными художникомъ г-жею М. А. Диллонъ, по которому послѣдняя за 3300 р. обязалась изготовить бронзовый бюстъ Н. И. Лобачевскаго, высотою въ 1½ аршина, колонну изъ чернаго гранита высотою не менѣе 2 аршинъ и пьедесталъ. Общая высота памятника съ бюстомъ должна быть не менѣе 4 арш. 6 верш.

18 января 1896 г. послѣдовало Высочайшее соизволеніе на постановку памятника Н. И. Лобачевскому по проекту г-жи М. Л. Диллонъ.

Вскорѣ послѣ этого г-жею Диллонъ былъ изготовленъ и отправленъ въ Казань и самый памятникъ. Открытіе памятника было назначено на 1 сентября по соглашенію казанскаго городского головы и предсѣдателя физико-математическаго общества. Совѣтъ Императорскаго Казанскаго Университета постановилъ имѣть въ этотъ день торжественное засѣданіе и соединить торжество открытія памятника съ торжествомъ постановки бюста Н. И. Лобачевскаго въ актовомъ залѣ университета.

1 сентября, послѣ заупокойной литургіи и панихиды въ университетской церкви, члены совѣта университета, члены коммиссіи по сооруженію памятника, члены физико-математическаго общества и приглашенные гости перешли къ памятнику Лобачевскаго на площадь, убранную флагами, гирляндами и гербами. Здѣсь на особомъ возвышеніи, обнесенномъ рѣшеткой, украшенной гирляндами, совершена была литія по Н. И. Лобачевскомъ, послѣ которой, въ моментъ провозглашенія „вѣчной памяти“, предсѣдатель физико-математическаго общества, проф. А. В. Васильевъ открылъ завѣсу, покрывавшую бюстъ. На торжествѣ присутствовала дочь Н. И. Лобачевскаго, В. Н. Ахлопкова, а также ученики его, сенаторъ А. П. Безобразовъ и докторъ Казанскій.

Послѣ открытія всѣ участвующіе въ торжествѣ лица перешли въ актовый залъ Университета, гдѣ, передъ каѳедрой, украшенной живыми растеніями, былъ установленъ на особой колонкѣ бюстъ Н. И. Лобачевскаго. На торжественномъ засѣданіи совѣта были произнесены рѣчи предсѣдателемъ коммиссіи по сооруженію памятника С. В, Дьяченко, проф. Ѳ. М. Суворовымъ, проф. А. В. Васильевымъ и предсѣдателемъ нижегородскаго кружка любителей физики и астрономіи С. В. Щербаковымъ. Всѣ эти рѣчи были покрыты рукоплесканіями многочисленной публики. Затѣмъ ректоръ университета К. В. Ворошиловъ прочелъ рядъ привѣтствій, полученныхъ университетомъ отъ различныхъ учрежденій и лицъ и благодарилъ всѣхъ, собравшихся на праздникъ науки.

„День Лобачевскаго“ закончился торжественнымъ вечернимъ засѣданіемъ физико-математическаго общества, открывшимся рѣчью предсѣдателя, проф. А. В. Васильева, въ которой онъ благодарилъ всѣхъ

лицъ, принимавшихъ участіе въ сооруженіи памятника и учрежденіи капитала имени Н. И. Лобачевскаго. Затѣмъ говорилъ С. В. Щербаковъ, а послѣ его рѣчи проф. Васильевъ прочелъ многочисленныя привѣтствія, полученныя физико-математическимъ обществомъ. Затѣмъ началась научная часть засѣданія, состоявшая въ изложеніи содержанія сообщеній, присланныхъ иностранными учеными (Эрмитъ, Гальстедъ, Жирарвиль, Лемуанъ, Лезанъ, Нейбергъ и Оканъ) желавшими такимъ образомъ почтить память великаго геометра. Эти сообщенія, числомъ 9, напечатаны въ „Извѣстіяхъ физико-математическаго общества. Н. В. Рейнгардтъ прочелъ сообщеніе: „Огюстъ Контъ и Лобачевскій“. Засѣданіе было закрыто краткой рѣчью предсѣдателя.

ЗАДАЧИ.

№ 421. Открытый сверху сосудъ имѣетъ форму цилиндра, къ основанію котораго приложенъ конусъ. Пусть будетъ высота цилиндра h, радіусъ его основанія r и высота конуса x. Каковы должны быть соотношенія между этими величинами, чтобы при данномъ объемѣ сосуда поверхность его была minimum?

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 422. Тѣло имѣетъ видъ цилиндра съ приложеннымъ къ одному изъ его основаній конусомъ. Пусть будутъ h [redacted] r высота и радіусъ основанія цилиндра, x—высота конуса. Каковы должны быть соотношенія между этими величинами, чтобы при данномъ объемѣ тѣла полная его поверхность была minimum?

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

[redacted] **423.** Показать, что площадь треугольника равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2bc\,.\cos B\,.\cos C + b^2ac\,.\cos A\,.\cos C + c^2ab\,.\cos A\,.\cos B},$$

гдѣ a, b, c суть стороны треугольника, [redacted] A, B, C — его углы.

М. Зиминъ (Орелъ).

[redacted] **424.** Доказать, что наименьшее кратное трехъ чиселъ A, B, C есть частное отъ дѣленія ABC на общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ BC, AC, AB.

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 425. Изъ данныхъ точекъ A и B провести двѣ прямыя такъ, чтобы точка ихъ пересѣченія лежала на данной окружности O, [redacted] уголъ между ними былъ бы maximum.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 426. Рѣшить уравненія:

$$a = y + x(1+z)^2,$$
$$b = y(1+z)^2 + xz^2,$$
$$c = x + yz^2.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 54 (1 сер.).—Какая существуетъ аналогія между динамическимъ электричествомъ и теченіемъ жидкости?

Обстоятельный отвѣтъ на этотъ вопросъ читатели найдутъ въ сочин.: „Lodge Oliver J. Moderne views of electricity. London 1892“ или въ нѣмецкомъ переводѣ этой книги: „Neueste Anschaungen über Elektricität“, übersezt von Anna von Helmholtz. Leipzig. 1896. См. также статью П. Бахметьева въ № 227 „Вѣстника“ (стр. 243),

Рѣшеній нѣтъ.

№ 75 (1 сер.)—Объяснить различіе между теплоемкостью при постоянномъ объемѣ и теплоемкостью при постоянномъ давленіи.

Опредѣляя теплоемкость газа при постоянномъ давленіи, мы даемъ ему свободно расширяться, а стараемся лишь, чтобы онъ во все время опыта имѣлъ одну и ту же упругость (находился подъ одинаковымъ давленіемъ). Но, расширяясь, газъ производитъ работу, слѣдовательно, теряетъ часть сообщеннаго ему тепла, которое, такимъ образомъ, не цѣликомъ уходитъ на поднятіе его температуры. Опредѣляя же теплоемкость газа при постоянномъ объемѣ, мы стараемся не давать газу расширяться и терять на это расширеніе тепло; поэтому въ послѣднемъ случаѣ газу нужно сообщить меньшее количество тепла, чтобы нагрѣть его до той же температуры, что въ первомъ случаѣ. *)

С. Кричевскій (Харьковъ).

№ 76 (1 сер.). Какимъ образомъ можно приблизительно опредѣлить число колебаній, соотвѣтствующее данному звуку, при помощи монохорда и камертона, число колебаній котораго извѣстно (напр. la_3)?

Передвигая подвижную кобылку монохорда, установимъ ее такъ, чтобы опредѣляемая ею струна звучала въ униссонъ съ даннымъ звукомъ; пусть длина такой струны l, а соотвѣтствующее ей искомое число колебаній — n. Установимъ теперь кобылку такъ, чтобы струна звучала въ униссонъ съ даннымъ камертономъ (напр. la_3), Пусть длина этой струны l_1, а число колебаній 870 (—число колебаній, соотвѣтствующее la_3). Такъ какъ число колебаній струны обратно пропорціонально длинѣ, то

$$n : 870 = l_1 : l, \text{ откуда}$$

$$n = \frac{870 . l_1}{l}$$

Для рѣшенія этой задачи можно еще пользоваться пропорціей

$$n : 870 = \sqrt{P} : \sqrt{P_1},$$

*) Пользуясь этимъ различіемъ, Мейеръ опредѣлилъ механическій эквивалентъ теплоты. (См. напр. Гано, изд. 1892 г., стр. 412 и 454).

гдѣ P и P_1 суть грузы, натягивающіе струну монохорда и соотвѣтствующіе данному тону и камертону. Послѣдній способъ въ особенности пригоденъ, когда звукъ струны монохорда выше звука даннаго камертона.

С. Кричевскій (Ромны), *S. Y. C.* (Псковъ); *Е. Латынинъ* (СПБ), *А. Рязновъ* (Самара).

№ 127 (1 сер.). Построить прямоугольный треугольникъ, котораго большій катетъ равнялся бы меньшему катету, сложенному съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу.

Называя катеты искомаго прямоугольнаго треугольника чрезъ x и y, гипотенузу черезъ z и перпендикуляръ чрезъ p, будемъ имѣть:

$$xy = pz,\ x^2 + y^2 = z^2,\ x - y = p.$$

Изъ послѣдняго уравненія получимъ

$$x^2 + y^2 - 2xy = p^2,$$

или, на основаніи двухъ первыхъ,

$$z^2 - 2pz = p^2,$$

откуда, удерживая передъ корнемъ только знакъ положительный,

$$z = p + p\sqrt{2}$$

Такимъ образомъ, при данномъ p, построеніе искомаго треугольника сводится къ слѣдующему. Изъ произвольной точки A очерчиваемъ окружность радіуса p, въ которой проводимъ два взаимно-перпендикулярные діаметра; одинъ, изъ нихъ продолжаемъ до точки C на разстояніе, равное разстоянію между концами діаметровъ. Полученная прямая AC будетъ гипотенузою искомаго треугольника, и тогда построеніе треугольника по гипотенузѣ и высотѣ на нее доканчивается извѣстнымъ способомъ. Въ самомъ дѣлѣ, теперь, если высота $= p$, гипотенуза будетъ $p + p\sqrt{2}$, слѣд. для катетовъ x и y имѣемъ соотношенія:

$$x^2 + y^2 = p^2(3 + 2\sqrt{2}),\ xy = p^2\ (1 + \sqrt{2}),$$

откуда

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = p^2$$

и

$$x = y + p.$$

Н. Артемьевъ (Спб.) *А. Веприцкій* (Карсъ). Ученики: Курск. (8). *П. А.* Симб. к. к. (7). *С. Э.* Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 147 (1 сер.) Маленькій шарикъ вращается около оси, находящейся на разстояніи одного метра отъ него. Центробѣжная сила равна вѣсу шарика. Сколько оборотовъ дѣлаетъ онъ въ минуту?

Величина центробѣжной силы, какъ извѣстно, выражается формулой

$$F = 4\pi^2 \frac{mR}{t^2} \cdots \qquad (\alpha),$$

гдѣ m есть масса тѣла, R — разстояніе отъ оси вращенія и t — время одного оборота въ секундахъ. Обозначая черезъ P вѣсъ даннаго шарика, имѣемъ

$$m = \frac{P}{g},$$

гдѣ g=9,81 метра, а потому уравненіе (x) представится въ видѣ

$$P = 4\pi^2 \frac{PR}{gt^2},$$

откуда

$$t = 2\pi \frac{\sqrt{R}}{g};$$

подставляя вмѣсто π, R, g ихъ численныя значенія, найдемъ для t приблизительно 2 секунды; слѣдовательно, шарикъ въ одну минуту дѣлаетъ приблизительно 30 оборотовъ. (При этомъ мы пренебрегаемъ величиной радіуса шарика).

С. Кричевскій (Харьковъ); *Н. П.* (Тифлисъ).

№ 277 (1 сер.). Возвысить въ квадратъ число 777...
1. Обозначивъ искомый квадратъ черезъ x, получимъ:

$$x = (0{,}7777\ldots.10^{\infty})^2 = {}^{49}/_{81}.10^{\infty} = 604938271604938271\ldots$$

2. $$x = 7^2\,(1111\ldots.)^2,$$

но

$$(1111\ldots.)^2 = 12345679012345679012345679O\ldots.;$$

умноживъ послѣднее число на 49, получимъ

$$x = 604938271604938271\ \ldots$$

Примѣчаніе.—Число $12345679012345679O\ldots. = \frac{10^{\infty}}{81}$.
Будучи умножено [redacted] $9.n$ (гдѣ n однозначно), оно даетъ очевидно число $nnnn\ldots$

А. Г. (Екатеринославъ); *Н. В.* (Воронежъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Ивановскій* (Воронежъ); *М. Л.* (Архангельскъ), *М. Кузьменко* (сл. Бѣлая).

NB. Никто изъ гг. приславшихъ рѣшеніе, не довелъ рѣшенія до конца. Большинство ограничилось представленіемъ искомаго квадрата въ видѣ

$$49\ (111\ldots.)^2$$

и возвышеніемъ въ квадратъ *n-значнаго* числа $111\ldots.$

№ 278 (1 сер.). Въ натуральномъ ряду чиселъ отъ 1 до 2310 включительно, сколько есть чиселъ, дѣлящихся порознь на 2, на 3, на 5, на 6, на 7, [redacted] 10, на 11, на 14, на 15 и т. д., т. е. вообще на D, гдѣ D есть дѣлитель числа 2310?

NB. Требуется найти общую теорему, которая позволитъ отвѣтить непосредственно на всѣ этого рода вопросы.

Въ общемъ видѣ задача эта выразится такъ: въ натуральномъ ряду 1, 2, 3.... N сколько есть чиселъ, дѣлящихся на D, гдѣ D есть дѣлитель числа N?

Пусть $N = nD$.

Первое число, дѣлящееся [redacted] D есть D; второе — $2D$; третье — $3D$ и т. д.; послѣднее же число которое дѣлится на D, есть nD или N.

Такимъ образомъ отъ 1 до N дѣлятся на D слѣдующія числа:

D, $2D$, $2D$.... nD, другими словами, чиселъ удовлетворяющихъ условію есть n или $\frac{N}{D}$. Напр., въ ряду отъ 1 до 2310 есть $\frac{2310}{15} =$ 154 числа, дѣлящихся на 15.

Байковъ (Курскъ).

№ 288 (1 сер.). Доказать, что площадь любого четыреугольника равна площади такого треугольника, котораго двѣ стороны соотвѣтственно равны діагоналямъ четыреугольника, а уголъ между ними равенъ взаимному наклоненію тѣхъ же діагоналей.

NB. Можно дать какъ геометрическое, такъ и тригонометрическое доказательство.

I. Чрезъ вершины даннаго четыреугольника $ABCD$ проведемъ линіи, параллельныя соотвѣтственнымъ діагоналямъ AC и BD. Площадь полученнаго такимъ образомъ параллелограмма $MNPQ$ вдвое болѣе площади четыреугольника $ABCD$. Поэтому площадь треугольника MNP равна площади четыреугольника $ABCD$, стороны же его MN [redacted] NP [redacted] уголъ между ними равны діагоналямъ AC [redacted] BD и углу между послѣдними.

II. Пусть уголъ между діагоналями будетъ α, а точка пересѣченія діагоналей пусть будетъ E; тогда

$$\text{пл. } ABCD = \frac{DE \cdot AE \sin\alpha}{2} + \frac{AE \cdot BE \sin\alpha}{2} + \frac{BE \cdot EC \sin\alpha}{2}$$

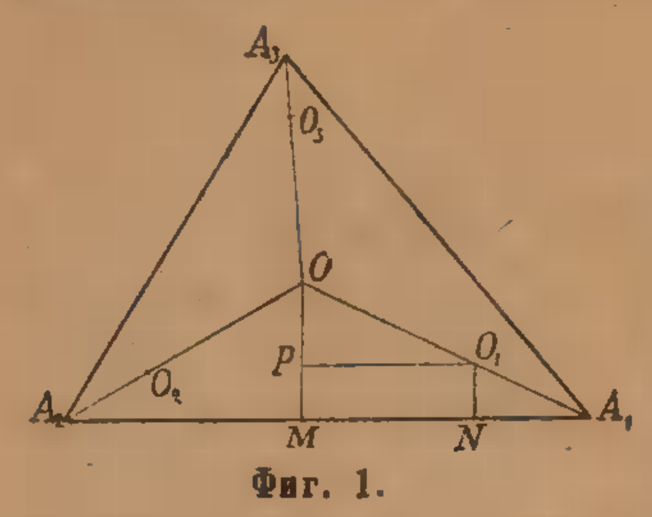
$$+ \frac{DE \cdot EC \sin\alpha}{2} = \frac{(DE + EB)(AE + EC)\sin\alpha}{2} = \frac{AC \cdot DB \sin\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

А. П. (Воронежъ); *С. Ш.* (Рига); *А. П.* (Оренбургъ); *О. Д.* (СПБ.); *В. С.* (Троицкъ); *Н. П.* (Тифлисъ); *В. Б.* (Кіевъ); *Н. К.* (Ромны); *Н. Г.* (Короча); *П. Р.* (Кіевъ); *Н. В.* (Воронежъ); *В. М.* (Кіевъ); *В. Соллертинскій* (Гатчино); *Н. Артемьевъ* (СПБ.); *М. Л.* (Архангельскъ); *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *А. Бобятинскій* (Ег. золот. розс.), *М. Кузьменко* (сл. Бѣлая); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка);

№ 350 (1 сер.). Въ треугольникъ вписана окружность; кромѣ того построены еще три окружности, каждая изъ которыхъ касается вписанной окружности [redacted] двухъ сторонъ даннаго треугольника; если

r, r_1, r_2, r_3 радіусы этихъ четырехъ окружностей, то требуется доказать, что



Фиг. 1.

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}.$$

Пусть O будетъ центръ вписаннаго круга; центры O_1, O_2, O_3 круговъ, радіусы которыхъ обозначены черезъ r_1, r_2, r_3, расположены на биссектрахъ OA_1, OA_2, OA_3 угловъ треугольника $A_1A_2A_3$, описаннаго около круга O. Проведя прямыя $OM \perp A_1A_2$; $O_1N \perp A_1A_2$ и $OP \perp OM$, изъ прямоугольнаго треугольника OPO_1, въ которомъ $QP = r - r_1$, $OO_1 = r + r_1$, $\angle O_1OP = 90^0 - {}^1/_2 A_1 = a_1$, получимъ

$$r - r_1 = (r + r_1)\cos a_1$$

или

$$r_1 = r\,\mathrm{tg}^2\frac{a_1}{2}.$$

Подобнымъ-же образомъ найдемъ

$$r_2 = r\,\mathrm{tg}^2\frac{a_2}{2},$$

$$r_3 = r\,\mathrm{tg}^2\frac{a_3}{2},$$

гдѣ черезъ a_2 и a_3 обозначены углы $90 - {}^1/_2 A_2$, $90 - {}^1/_2 A_3$. Изъ этихъ равенствъ выводимъ, что

$$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3} = r\left(\mathrm{tg}\frac{a_1}{2}\mathrm{tg}\frac{a_2}{2} + \mathrm{tg}\frac{a_1}{2}\mathrm{tg}\frac{a_3}{2} + \mathrm{tg}\frac{a_2}{2}\mathrm{tg}\frac{a_3}{2}\right),$$

а такъ какъ $a_1 + a_2 + a_3 = 180$, то

$$\mathrm{tg}\frac{a_1}{2}\mathrm{tg}\frac{a_2}{2} + \mathrm{tg}\frac{a_1}{2}\mathrm{tg}\frac{a_3}{2} + \mathrm{tg}\frac{a_2}{2}\mathrm{tg}\frac{a_3}{2} = 1,$$

такъ что

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}.$$

С. Блажко (Москва), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка). *С. Шатуновскій* (Каменецъ-Подольскъ).

№ 23 (2 сер.) Найти внутри даннаго четыреугольника такую точку, соединивъ которую съ вершинами, раздѣлимъ его на четыре равновеликіе треугольника.

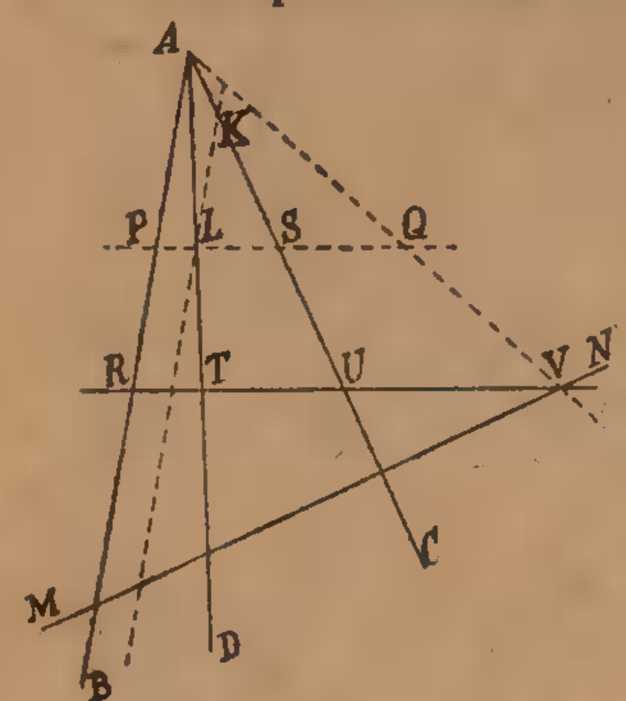
Пусть $ABCD$ данный четыреугольникъ, и X—искомая точка. Такъ какъ треугольники XAB и XBC равновелики, то точка X лежитъ на прямой, соединяющей средину O діагонали AC съ вершиной B. Точно также убѣдимся, что точка X лежитъ на прямой DO. Допустимъ сперва, что точки X и O не совпадаютъ, откуда слѣдуетъ, что діагональ BD даннаго четыреугольника дѣлитъ діагональ AC въ точкѣ O пополамъ. Если же точки O и X совпадаютъ, то, обратившись къ равновеликимъ

треугольникамъ AXB и AXD, найдемъ что точка X, или, что все равно, точка O прямой AC, лежитъ на прямой, соединяющей средину O' діагонали BD съ точкой A,—т. е. діагональ AC дѣлитъ діагональ BD въ точкѣ ея O' пополамъ. Итакъ, для того, чтобы задача была возможна, необходимо допустить что одна изъ діагоналей четыреугольника дѣлится пополамъ въ точкѣ пересѣченія съ другой діагональю. Если это условіе соблюдено, то средина діагонали, дѣлящей другую діагональ пополамъ, есть искомая точка X.

Н. С. (Одесса).

№ 400 (2 сер.) Даны прямыя AB, AD, AC, и MN. Провести къ нимъ сѣкущую такъ, чтобы полученные между прямыми три отрѣзка были въ данномъ отношеніи.

Изъ произвольной точки L, (см. черт. 1), взятой на прямой AD проводимъ параллель къ AB до пересѣченія съ AC въ точкѣ К. Отъ точки K откладываемъ по AC отрѣзокъ KS такъ, чтобы $AK:KS = m:n$. Точку S соединяемъ съ L и на прямой LS откладываемъ отрѣзокъ SQ такъ чтобы $LS:SQ = n:p$. Проводимъ прямую AQ до пересѣченія съ MN въ точкѣ Y. Линія, проведенная изъ Y параллельно PQ, и будетъ искомая. Въ самомъ дѣлѣ:



Фиг. 1.

$$AK:KS = m:n,$$

$$PL:LS = AK:KS = m:n,$$

$$LS:SQ = n:p, \text{ поэтому}$$

$$PL:LS:SQ = m:n:p; \text{ но}$$

$$RT:TU:UV = PL:LS:SQ, \text{ слѣдов.},$$

$$RT:TU:UV = m:n:p.$$

А. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ [redacted] (2 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная уголъ B и радіусы круговъ, описанныхъ около треугольниковъ ABD и DBC, гдѣ BD есть медіана основанія AC.

На сторонахъ даннаго угла отложимъ отъ вершины D отрѣзки DO и DO' равные даннымъ радіусамъ и изъ точекъ O и O' опишемъ окружности радіусами OD и $O'D$. Середину E прямой OO' соединяемъ съ D и проводимъ сѣкущую ADC перпендикулярно къ DE до пересѣченія съ окружностями въ точкахъ A и C. Соединивъ A и C съ другой точкой пересѣченія окружностей, съ точкой B, получимъ искомый треугольникъ ABC. Дѣйствительно, опустивъ на AC перпендикуляры OM [redacted] $O'N$, видимъ что $MD = DN$, откуда $AD = DC$. Кромѣ того $\angle ABC = \angle D$, ибо вписанный $\angle BAC$ равенъ центральному DOO' и $\angle ACB = \angle DO'O$.

В. Буханцевъ (Борисоглѣбскъ); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *Уч. Кіево-Печер. гимн. Л.* [redacted] *Р.*; *П. Ивановъ* (Одесса); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 419 (2 сер.). Построить треугольникъ ABC, зная основаніе AC и радіусы круговъ, описанныхъ около треугольниковъ ABD и DBC, гдѣ D есть лежащая на основаніи AC, точка изъ которой высота BE видна подъ даннымъ угломъ.

Построимъ прямоугольный треугольникъ OKO_1, такъ чтобы катетъ KO_1 былъ равенъ половинѣ даннаго основанія и $\angle KO_1O$ былъ равенъ прямому безъ даннаго угла зрѣнія. Пусть окружности, описанныя изъ O и O_1 данными радіусами, встрѣчаются въ B и D; проведемъ сѣкущую ADC параллельно KO_1 (A и C — суть соотвѣтственно точки пересѣченія сѣкущей съ окружностями O и O_1). Треугольникъ ABC будетъ искомый. Опуская изъ O и O_1 перпендикуляры па AC, убѣждаемся, что $AC = 2KO_1$; углы KO_1O и DBE равны (E есть основаніе высоты BE), какъ углы съ перпендикулярными сторонами, а поэтому уголъ BDE равенъ данному. Для возможности задачи нужно, чтобы $R+R_1 >$ суть $b\cos\varphi$, гдѣ R, R_1, φ и $2b$ OO_1 или $R+R_1 >$ данные радіусы, уголъ и основаніе.

К. Шиголевъ (Курскъ); *В. Васкаковъ* (Ив.-Вознесенскъ); *В. Шишаловъ* (с. Середа); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 573 (2 сер.) Черезъ концы гипотенузы BC прямоугольнаго треугольника ABC проведены параллельныя прямыя BX и CY и на нихъ изъ A опущенъ перпендикуляръ, пересѣкающій BX въ точкѣ M и CY въ точкѣ N. Показать, что уголъ MDN прямой (гдѣ D есть основаніе перпендикуляра изъ A на гипотенузу).

Четыреугольники $AMBD$ и $ANCD$ вписуемы, слѣдовательно, $\angle AMD = \angle ABC$ и $\angle AND = \angle ACB$; но $ABC + ACB = d$, откуда $AMD + AND = d$, и потому $MDN = d$.

К. Межинскій (Симбирскъ); *Н. С.* (Тула); *В. Власовъ* (Курскъ); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *П. Ивановъ* (Одесса); *А. Варенцовъ* (Рост. Н./Д.). *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 232 (3 сер.). — Внутри треугольника ABC построить такія точки M и M', чтобы углы MAB, MBC и MCA, $M'AC$, $M'CB$ и $M'BA$ были равны между собой*).

Проведемъ двѣ окружности, одну проходящую черезъ A и B и касательную къ BC въ точкѣ B; другую, проходящую черезъ B и C и касательную къ AC въ точкѣ C. Точка пересѣченія этихъ окружностей M будетъ одна изъ искомыхъ: углы MAC, MCB и MBA равны, что не трудно замѣтить, сравнивъ дуги, заключенныя между ихъ сторонами.

Проведя двѣ другія окружности, — одну, проходящую черезъ точки A и B и касательную къ AC въ точкѣ A, другую — черезъ точки B и C и касательную къ AB въ точкѣ B, найдемъ точку M'. Точка M', будучи взаимною съ M, можетъ быть построена и инымъ образомъ. (См. статью А. П. Грузинцева „Взаимныя точки треугольника" въ №№ 85 и 86 „Вѣстника").

П. Бѣловъ (с. Знаменка); *С. Зайцевъ* (Курскъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *Уч. Кіево-Печ. гим. Л.* и *Р.*

---

*) Точки M и M' въ геометріи треугольника носятъ названіе точекъ Брокара.

№ 269 (3 сер.). въ правильномъ восьмиугольникѣ $ABCDEFGH$ проведена діагональ AD. Найти геометрически отношеніе къ ней стороны восьмиугольника.

Пусть r радіусъ описаннаго около восьмиугольника круга. Изъ четыреугольника $ABCD$ имѣемъ

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

или

$$2r^2 = r\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot AD + 2r^2 - r^2\sqrt{2},$$

откуда

$$AD = r\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \text{ а}$$

$$\frac{AD}{AB} = 1 + \sqrt{2}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *Уч. Кіево-Печ. гимн. Л. и Р.*; *Э. Заторскій* (Вильно); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *С. Петрашкевичъ* (Скопинъ).

№ 271 (3 сер.). Найти остатокъ отъ дѣленія на 13 выраженія $7^{100} + 11^{100}$.

$$7^{100} + 11^{100} = 7^4[(7^{12})^8 - 1] + 11^4[(11^{12})^8 - 1] + 7^4 + 11^4$$

По теоремѣ Фермата $7^{12} - 1$ и $11^{12} - 1$ дѣлятся на 13. Слѣдовательно, остатокъ отъ дѣленія $7^{100} + 11^{100}$ на 13 равенъ остатку отъ дѣленія $7^4 + 11^4$ на 13. Послѣдній [redacted] равенъ 12.

М. Зиминъ (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Учен. Кіево-Печ. гимн. Л. и Р.*; *В. Винтеръ, кн. Енгалычевъ и Григорьевъ* (Симбирскъ).

№ 344 (3 сер.). Въ данный шаръ радіуса r помѣстить 7 кубовъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ имѣлъ центръ общій съ центромъ даннаго шара, а каждый изъ остальныхъ имѣлъ одну сторону общую съ первымъ кубомъ [redacted] 4 вершины на поверхности даннаго шара,

Пусть ребро куба x. Опустивъ изъ центра шара O перпендикуляръ OP на какую-нибудь сторону куба, вершины которой лежатъ на поверхности шара, [redacted] соединивъ O съ одной изъ этихъ вершинъ Q, мы изъ треугольника OPQ будемъ имѣть

$$r^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2,$$

откуда

$$x = \frac{2r}{\sqrt{11}}$$

М. Зиминъ (Елецъ).

№ 346 (3 сер.). Найти двузначное число, кратное 7, если кубъ его при дѣленіи на 4 и на 5 даетъ остатки, сумма которыхъ равна 5.

Обозначивъ искомое число черезъ $7x$, мы видимъ, что $x < 15$; кромѣ того не трудно видѣть, что x не можетъ быть ни четнымъ, ни кратнымъ 5-ти. Изъ чиселъ же 1, 3, 7, 9, 11, 13 вопросу удовлетворяютъ 7 [redacted] 9, [redacted] потому искомое число будетъ 49 или 63.

М. Зиминъ (Орелъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 352 (3 сер.). Показать, что если

$$x+y+z=1,$$

то

$$x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)>6(1-2x)(1-2y)(1-2z)$$

и

$$\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{(1-2x)(1-2y)(1-2z)}>8,$$

гдѣ x, y и z суть положительныя числа.

Такъ какъ среднее геометрическое меньшее средняго ариѳметическаго, то

$$\sqrt{(1-2x)(1-2y)}<\frac{1-2x+1-2y}{2} \text{ или } \sqrt{(1-2x)(1-2y)}<z.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$\sqrt{(1-2x)(1-2z)}<y,$$

$$\sqrt{(1-2y)(1-2z)}<x.$$

Перемноживъ три послѣднія неравенства, получимъ

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)<xyz \;\ldots\ldots\; (1).$$

Кромѣ того имѣемъ (см. зад. № 217 третьей серіи):

$$(1-x)(1-y)(1-z)>8xyz \;\ldots\ldots\; (2).$$

Неравенства (1) и (2) даютъ:

$$\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{(1-2x)(1-2y)(1-2z)}>8 \;\ldots\ldots\; (3).$$

Изъ неравенства (2) слѣдуетъ:

$$xy+yz+xz>9xyz;$$

отсюда послѣдовательно находимъ:

$$4(xy+yz+xz)-12xyz>3(xy+yz+xz)-3xyz,$$

и

$$\frac{xy+yz+xz-3xyz}{6}>\frac{xy+yz+xz-xyz}{8}.$$

Изъ равенства (3) слѣдуетъ:

$$\frac{xy+yz+xz-xyz}{8}>(1-2x)(1-2y)(1-2z),$$

а потому

$$\frac{xy+yz+xz-3xyz}{6}>(1-2x)(1-2y)(1-2z).$$

Но (см. зад. № 325 третьей серіи)

$$xy + yz + xz - 3xyz = x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z);$$

слѣдовательно

$$x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z) > 6(1-2x)(1-2y)(1-2z).$$

М. Зиминъ (Орелъ).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1896.—№ 6.

Note sur une propriété focale des coniques à centre. Par *M. Stuyvaert*. Дается элементарное доказательство слѣдующей *теоремы*:

Пусть F и F′ суть фокусы коническаго сѣченія. Изъ нѣкоторой точки M проведены къ этой кривой касательныя MT и MP, первая—до точки касанія T, вторая—до точки пересѣченія ея P съ діаметромъ кривой, сопряженнымъ съ OM; эти касательныя связаны между собой равенствомъ

$$MP \, . \, MT = MF \, . \, MF'.$$

Слѣдствія. 1. Если Q есть точка касанія касательной MP, N—точка пересѣченія QT съ OM, то

$$\frac{MQ \, . \, MP}{MF \, . \, MF'} = \frac{MN}{MO}.$$

(Это равенство было найдено *Laisant*'омъ).

2. Если точка M взята на малой оси кривой, то

$$MP \, . \, MT = MF^2.$$

3. Пусть M взята на ассимптотѣ гиперболы; MN—касательная къ этой кривой, ограниченная въ N другой ассимптотой, T — точка касанія, M′ — пересѣченіе касательной, параллельной MN съ первой ассимптотой; въ этомъ случаѣ

$$MF \, . \, MF' = MN \, . \, MO.$$

4. Если ABCD есть параллелограммъ, описанный около коническаго сѣченія съ центромъ и P—точка касанія его стороны AB, то

$$\frac{FA \, . \, FC}{FB \, . \, FD} = \frac{AP}{BP}.$$

Notes mathématiques. 6. *Задача.* Найти цѣлыя числа *x*, *y*, *z*, удовлетворяющія ур-нію:

$$\frac{x}{y} \cdot z = \frac{x}{y} + z.$$

Рѣшеніе. Опредѣлимъ изъ ур-нія

$$z = \frac{x}{x-y}$$

и положивъ

$$x = y + u,$$

получимъ

$$z = \frac{y}{u} + 1$$

Такъ какъ z число цѣлое, то должно положить $y = m.\ u$; вслѣдствіе этого

$$z = m + 1,\ x = (m + 1)\ u,$$

и данное ур-ніе обращается въ тождество:

$$\frac{(m+1)\ u}{mu} \cdot (m+1) = \frac{(m+1)\ u}{mu} + (m+1)\cdot$$

Напр.

$$\frac{7}{6} \cdot 7 = \frac{7}{6} + 7; \frac{156}{143} \cdot 12 = \frac{156}{143} + 12,\ \text{и т. д.}$$

(*E. Barbette*).

7. *Теорема.* Нечетное совершенное число есть сумма двухъ квадратовъ. (*Stuyvaert*).

8. *Sur les fractions décimales périodiques mixtes.* Извлеченіе изъ мемуара. г. Соколова: „Quelques considérations sur des fractions analogues aux fractions décimales".

Bibliographie. Arithmetic for High Schools and Collegiale Institutes. By *J. C. Glashan.* Ottava. 1890.

Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes. Par. *E. Carvallo.* Paris. 1896.

Léçons de Graphostatique. Par. M. Breithof. Liège 1895.

Cours de mécanique. Par. *I. Massau.* T. II. Gand. 1896

Solutions de questions proposées. №№ 947, 953, 954, 956, 957, 984, CCCLXII.

Questions d'examen. №№ 750—752.

Questions proposées. №№ 1072—1075.

Construire un triangle dont les bissectrices sont données. Par. *M. Barbarin.* Рѣшеніе задачи *Catalan'a*: *построить тр—къ по даннымъ его тремъ биссектриссамъ.* Предварительно авторъ рѣшаетъ задачу: *построить тр—къ по данному его углу A и даннымъ биссектриссамъ угловъ B и C.* Рѣшеніе приводится къ ур—нію 3-й степени и вслѣдствіе сложности не поддается сжатому изложенію.

Д. Е.

1896 — № 7.

Du meilleur système de numération et de poids et mesures. Par. *M. Gelin.* Авторъ разбираетъ вопросъ о наилучшей системѣ счисленія и мѣръ. Исходя изъ положенія, что основаніемъ системы должно быть число не слишкомъ большое и не слишкомъ малое, дѣлящееся при томъ на 2 и на 4, онъ разсматриваетъ системы съ основаніями 8, 10 и 12 и отдаетъ предпочтеніе основанію 8.

Sur un système de coniques. Par *M. I. Neuberg. Системой* коническихъ сѣченій наз. группа кривыхъ 2-го порядка, удовлетворяющихъ четыремъ даннымъ условіямъ, т. е. опредѣляющихся величиной одного перемѣннаго параметра.

Если μ кривыхъ системы проходятъ чрезъ данную точку и ν кривыхъ той-же системы касаются данной прямой, то говорятъ, что *система характеризуется* числами μ и ν, или символомъ (μ, ν).

Въ настоящей статьѣ M. Neuberg разсматриваетъ систему коническихъ сѣченій, въ которую, какъ частный случай, входятъ *круги Tucker'a* *).

Пусть $A_1B_1C_1$ есть одинъ изъ тр-въ, гомотетичныхъ съ даннымъ тр-мъ ABC относительно данной точки M.

Если X_1, X_2 суть пересѣченія BC съ A_1B_1 и A_1C_1,
Y_1, Y_2 „ „ „ CA съ B_1C_1 и B_1A_1,
Z_1, Z_2 „ „ „ AB съ C_1A_1 и C_1B_1,

*) См. „Новая геометрія треугольника".

то шесть точекъ X_1, X_2, Y_1 . . . . . находятся на одной кривой 2-го порядка U. Кривыя U составляютъ систему, перемѣннымъ параметромъ которой служитъ отношеніе подобія *k* тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$, и представляютъ собой параболы, гиперболы или эллипсы, смотря по тому, находится-ли точка M на *эллипсѣ Штейнера*, внѣ его или внутри его.

Если точка M совпадаетъ съ *точкой Лемуана* *) тр-ка ABC, то система U обращается въ систему круговъ Tucker'а.

Относительно эллипса Штейнера въ статьѣ доказаны слѣдующія теоремы:

1) *Тр-къ* $A_0B_0C_0$, *симметричный съ даннымъ тр-мъ* ABC *относительно одной изъ точекъ эллипса Штейнера, трояко гомологиченъ съ тр-мъ* ABC, *при чемъ одна изъ осей гомологіи безконечно удалена, а двѣ другія параллельны.*

2) Для всякой точки M существуютъ два тр-ка $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$, гомотетичныхъ съ даннымъ тр-мъ ABC относительно M и трояко гомологичныхъ съ этимъ тр-мъ. *Если точка* M *перемѣщается по эллипсу* E', *концентричному и гомотетичному съ эллипсомъ Штейнера, то тр-ки* $A_1B_1C_1$ *и* $A_1'B_1'C_1'$ *не измѣняются по величинѣ, вершины-же ихъ перемѣщаются по эллипсамъ, гомотетичнымъ съ* E' *относительно* A, B *и* C.

Bibliographie. The Elements of Algebra with numerous Exercises. By *J. A. Lellan*.

Lezioni di calcolo infinitesimale. Da *E. Pascal*. Milano. 1895. Prix: 6 fr.

Curso de Analyse infinitesimal. Par *F. G. Teixeira*. Porto. 1886.

Elementi di Aritmetika. Par *A. Faifofer*. Venezia. 1895. Prix: 2,5 fr.

Elementi di Algebra. Par A. F. Prix: 3 fr.

Elementi di Geometria. Par A. F. Prix: 4 fr.

Cours de Géometrie analytique. Par *B. Niewenglowski*. t. III. Paris. 1896. Prix: 12 fr.

Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal. Par *M. F. Tisserand*. Paris. 1896. Prix: 9 fr.

Solutions de questions proposées. №№ 961, 962, 964—966, 980, 983, 996, 998, DXRIX. Подъ № 961 доказана слѣдующая теорема, предложенная *Neuberg*'омъ:

Если A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 суть основанія и средины высотъ тр-ка ABC, то:

1) Окружности $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ и $A_2B_2C_1$ проходятъ чрезъ ортоцентръ тр-ка ABC и чрезъ средины его сторонъ.

2) Тр-ки $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ обратно подобны съ тр-мъ ABC.

3) Центры α, β, γ круговъ $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ суть вершины тр-ка, имѣющаго ортоцентромъ центръ круга девяти точекъ тр-ка ABC.

4) Прямыя $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ пересѣкаются въ одной точкѣ, дѣлящей эти прямыя въ отношеніи 4: 1; та-же точка дѣлитъ въ отношеніи 2:3 разстояніе между ортоцентромъ тр-ка ABC и центромъ описаннаго около него круга.

Questions d'examen. №№ 753, 754.

Questions proposées. №№ 1076—1079.

Д. Е.

1896—№№ 8 и 9.

Les cercles de Chasles. Par *M. A. Droz-Farny*, Авторъ замѣтки исправляетъ погрѣшности, вкравшіяся въ статью *Barisien*'а о кругахъ Chasles'a (*Mathesis*, 1895, №№ 6, 7 и 11) и указываетъ еще нѣкоторыя свойства этихъ круговъ.

Sur le moindre multiple Par *M. Stuyvaert*. Имѣя въ виду тѣсную связь между теоріями общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ чиселъ, авторъ предлагаетъ порядокъ, въ которомъ должны излагаться теоремы, относящіяся къ этимъ статьямъ ариѳметики.

Notes extraites de la correspondance mathèmatique et physique. 12. *Sur un problème classique*. Рѣшеніе задачи: *Чрезъ точку* O, *заданную въ углѣ* CAB, *провести прямую* MN, *образующую съ сторонами угла тр-къ* MAN *данной площади* m^2.

Обозначивъ чрезъ I пересѣченіе AC съ прямой, проведенной чрезъ O параллельно AB, построимъ параллелограммъ AIPQ, площадь котораго $= m^2$, такъ-чтобы сторона его AQ была на линіи AB. Если искомая сѣкущая MN пересѣчется съ PQ въ S, то площ. OPS = площ. OIM + площ. NQS; отсюда, вслѣдствіе подобія тр-въ,

*) См. „Новая геометрія треугольника“.

входящихъ въ это равенство, находимъ:

$$OP^2 = OI^2 + NQ^2;$$

положеніе точки N, такимъ образомъ, можетъ быть легко найдено.

13. *Problème d'Algèbre*. Задача: *Раздѣлить каждое изъ данныхъ чиселъ* $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ *на двѣ части, такъ чтобы постоянное отношеніе* r *первой части каждаго числа ко второй части слѣдующаго за нимъ было отношеніемъ второй части послѣдняго числа къ первой части перваго.*

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть первыя части данныхъ чиселъ, то задача приводится къ рѣшенію n ур-ній:

$$x_1 = r(a_2 - x_2)$$

$$x_2 = r(a_3 - x_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = r(a_n - x_n),$$

$$x_n = r(a_1 - x_1).$$

Bibliographie. Exercices de Geometrie. Par. *F. G.* Paris. 1896. Prix: 12 fr.
Proceedings of the Edinburgh Society. Edimbourg.
Elemente der höheren Mathematik Von *Biermann*. Leipzig. 1895. Prix: 10 m.
Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimal. Par M. *D'Ocagne*. Paris. 1896. Prix: 12 fr.

Solutions de questions proposées №№ 991, 997, DLIII, DLIV.

Подъ № 997 доказана слѣдующая теорема, предложенная Neuberg'омъ:

Пусть A', B', C', D' суть проэкціи точки M на стороны AB, BC, CD, DA чет-ка ABCD. Если уголъ, составленный двумя противоположными сторонами чет-ка A'B'C'D, или отношеніе этихъ сторонъ, имѣетъ постоянную величину, то геометрическое мѣсто точки M есть окружность.

Questions d'examen №№ 755—761.

Questions proposées. №№ 1080—1088.

Д. Е.

ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

С. Гирману (Варшава). Будетъ напечтано.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 4-го Декабря 1897 г.
„Центральная типо-литографія“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.